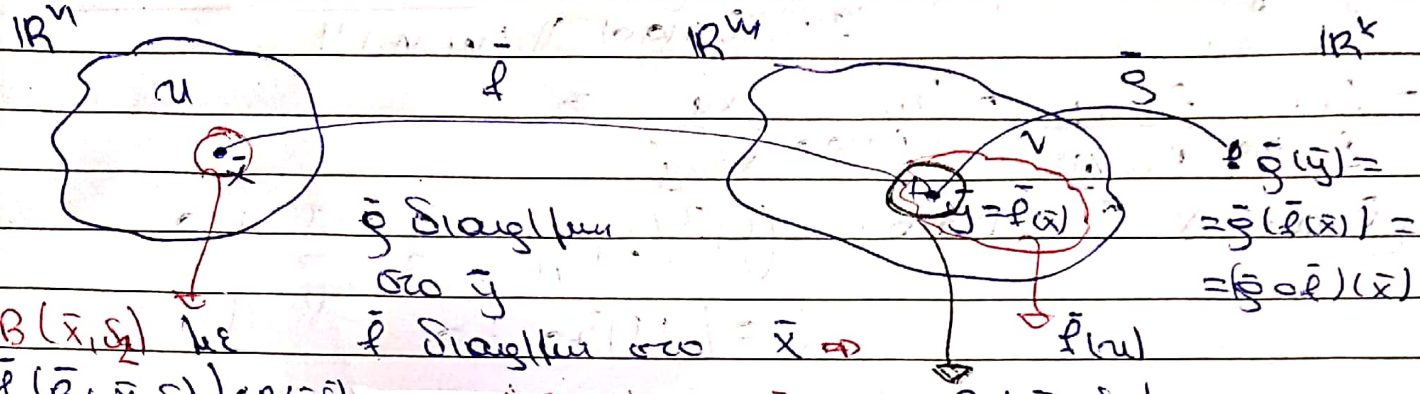
23/11/2020



$\bar g$ διαφ/μη στο $\bar y$

$\bar f$ διαφ/μη στο $\bar x$ $\Rightarrow$ $\bar f$ συνεχής στο $\bar x$

$B(\bar x, \delta_2)$ με $\bar f(B(\bar x, \delta_2)) \subset B(\bar y, \delta_1)$

$\Leftrightarrow \forall\, \bar a \in B(\bar x, \delta_2) : \bar f(\bar a) \in B(\bar y, \delta_1)$

$\Leftrightarrow \forall\, \bar a \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar a - \bar x\| < \delta_2 : \|\bar f(\bar a) - \bar f(\bar x)\| < \delta_1$

• Όλα αυτά γίνονται για να είναι οι συνθέσεις μας καλά ορισμένες

Για τα επιλεγμένα $\delta_1, \delta_2 > 0$ (τα οποία υπάρχουν!) ισχύει για $\bar h \in B(\bar 0, \delta_2) \setminus \{\bar 0\} \subset \mathbb{R}^n$

$\bar k \in B(\bar 0, \delta_1) \setminus \{\bar 0\} \subset \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι:

$\bar x + \bar h \in B(\bar x, \delta_2) \setminus \{\bar x\}$, $\bar f(\bar x + \bar h) \in B(\bar y, \delta_1) \subset V$ και για $\bar y + \bar k = \bar f(\bar x) + \bar k \in B(\bar y, \delta_1) \setminus \{\bar y\} \subset V$

$\Leftrightarrow 0 < \|\underbrace{\bar x + \bar h - \bar x}_{=\bar h}\| < \delta_2$

Συνεπώς μπορούμε τώρα να δούμε αν:

$$\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{(\bar g \circ \bar f)(\bar x + \bar h) - (\bar g \circ \bar f)(\bar x) - BA\bar h}{\|\bar h\|} = \bar 0$$

Γνωρίζουμε (όταν θέλαμε να δείξουμε, πάντα γνωρίζαμε κάτι): $\displaystyle\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{\bar f(\bar x + \bar h) - \bar f(\bar x) - A\bar h}{\|\bar h\|} = \underset{\in \mathbb{R}^m}{\tilde{\bar 0}}$ και

$$\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{\bar g(\bar y + \bar k) - \bar g(\bar y) - B\bar k}{\|\bar k\|} = \underset{\in \mathbb{R}^k}{\tilde{\bar 0}}$$

Ένα πολύ χρήσιμο αλλά ουσιαστικό "τρικ": Αν θέσουμε
$\bar f(\bar y+\bar u) - \bar f(\bar x) - A\bar u =: \bar \varphi(\bar u)$ και:
$\bar g(\bar y+\bar z) - \bar g(\bar y) - B\bar z =: \bar\psi(\bar z)$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\lim_{\bar u\to\bar 0} \frac{\bar\varphi(\bar u)}{\|\bar u\|} = \bar 0 , \quad \lim_{\bar z\to\bar 0} \frac{\bar\psi(\bar z)}{\|\bar z\|} = \bar 0 .$$

Άρα θέλουμε να δείξουμε κάτι αντίστοιχο και για τη σύνθεση: Έχουμε:

$$(\bar g\circ\bar f)(\bar x+\bar u) = \bar g(\bar f(\bar x+\bar u)) \quad (*)$$

(*) Θεωρούμε τα $\bar u, \bar z$ να είναι στις μορφές που είδαμε πριν

(*) $$(\bar g\circ\bar f)(\bar x+\bar u) = \bar g(\underbrace{\bar f(\bar x+\bar u)}_{=\underbrace{\bar f(\bar x)}_{=\bar y}+\underbrace{A\bar u+\bar\varphi(\bar u)}_{=:\bar z}}) = \bar g(\bar f(\bar x)+A\bar u+\bar\varphi(\bar u)) =$$

$$= \bar g(\bar f(\bar x)) + B\bar z + \bar\psi(\bar z) = \bar g(\bar f(\bar x)) + BA\bar u + B\bar\varphi(\bar u) + \bar\psi(A\bar u+\bar\varphi(\bar u))$$

Άρα πρέπει και αρκεί να: $\displaystyle\lim_{\bar u\to\bar 0} \frac{B\bar\varphi(\bar u)+\bar\psi(A\bar u+\bar\varphi(\bar u))}{\|\bar u\|} = \bar 0$

$$\left[= \lim_{\bar u\to\bar 0} \frac{(\bar g\circ\bar f)(\bar x+\bar u) - (\bar g\circ\bar f)(\bar x) - BA\bar u}{\|\bar u\|}\right]$$

Πρέπει να δείξω αυτό χρησιμοποιώντας ότι:

$$\lim_{\bar u\to\bar 0} \frac{\bar\varphi(\bar u)}{\|\bar u\|} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\bar z\to\bar 0} \frac{\bar\psi(\bar z)}{\|\bar z\|} = \bar 0$$

Άρα συνοψίζουμε: έχουμε $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{\varphi}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$, $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$

και θέλουμε:

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{B\bar{\varphi}(\bar{u}) + \bar{\psi}(A\bar{u} + \bar{\varphi}(\bar{u}))}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

[ΓΙΑ ΛΟΓΟΥΣ ΣΥΝΤΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΛΥΤΕΡΗΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΧΩΡΙΣ ΤΙΣ ΠΑΥΛΕΣ]

Επειδή $\|B\bar{\xi}\| \leq \|B\| \, \|\bar{\xi}\|$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ για $u_\nu \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\varphi(u_\nu)}{u_\nu} \to 0 \Rightarrow \frac{B\varphi(\bar{u}_\nu)}{\|u_\nu\|} \leq \|B\| \cdot \|\underbrace{\frac{\varphi(u_\nu)}{u_\nu}}_{\to 0}\| \to 0$

$\Rightarrow \frac{B\varphi(u_\nu)}{\|u_\nu\|} \to 0$

Μένει να δείξουμε ότι: $\lim_{u\to 0} \frac{\psi(Au + \varphi(u))}{\|u\|} = 0$

Αφού $\lim_{u\to 0} \frac{\varphi(u)}{\|u\|} = 0$ έχουμε για $\varepsilon = 1$: $\exists\, \delta_3 \in (0, \delta_2)$
$\forall u \in B(0, \delta_3) \setminus \{0\}: \left\| \frac{\varphi(u)}{\|u\|} \right\| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|} < 1$

Επίσης, αφού $\lim_{\xi\to 0} \frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ Δεδομένο!!!

Δηλ. ισοδύναμα $\psi(\xi) = \|\xi\| \cdot \psi_1(\xi)$ με $\lim_{\xi\to 0} \psi_1(\xi) = 0$

Προκύπτει ότι για $h \in B(0,\delta_3)\setminus\{0\}$ ισχύει:

$$\frac{\|\varphi(Ah+g(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|Ah+g(h)\|\,\|\varphi_1\cdot(Ah+g(h))\|}{\|h\|}$$

$$= \left\|\frac{Ah}{\|h\|}+\frac{g(h)}{\|h\|}\right\| \, \underbrace{\|\varphi_1(Ah+g(h))\|}_{\to 0}$$

, αφού για $h_\nu\to 0 \Rightarrow Ah_\nu\to 0$ και $g(h_\nu)\to 0$ (1) $= \frac{g(h_\nu)}{\|h_\nu\|}\|h_\nu\| \to 0$

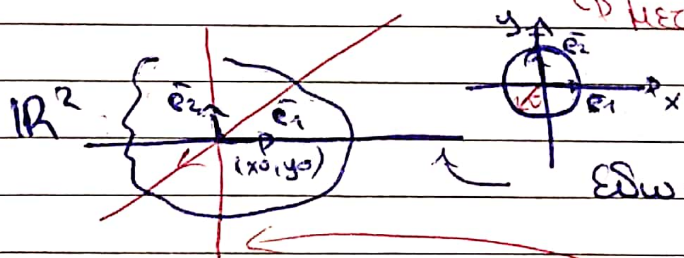
$$\le \underbrace{\frac{\|A\|\,\|h\|}{\|h\|}}_{\le\|A\|} + \underbrace{\frac{\|g(h)\|}{\|h\|}}_{\le 1} \le \|A\|+1$$

(1) Αφού $g(h_\nu)\to 0$ και $\varphi_1(\xi_\nu)\to 0$ για $\xi_\nu\to 0$

§3.4 (πριν την 3.3 αυτή θα γίνει μετά) Συν.
Γνωρίσαμε την έννοια της μερικής παραγώγου μιας $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, στο $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in U$ ως προς την i-οστή μεταβλητή $(i=1,\dots,n)$ ως $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar x) = f_i'(x_i) =$

$= \lim_{h\to0}\frac{f_i(x_i+h)-f_i(x)}{h}$ για τον περιορισμό της f στην ευθεία $\bar x(h)=\bar x + h\bar e_i$, $h\in\mathbb{R}$,

$f_i(x) := f(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)$ → μεταβλητό, σταθερά



πεδίο ορισμού της $f:U\to\mathbb{R}$

Εδώ ορίζεται η f_1 με $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := f_1'(x_0)$

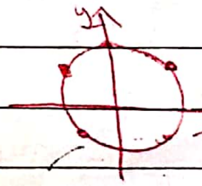
όπου $f_1(x) := f(x,y_0)$

Εδώ ορίζεται η f_2,
$f_2(y) := f(x_0,y)$ με $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := f_2'(y_0)$

Η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar v=(v_1,v_2)$ με $\|\bar v\|=1$
Σπαρατήρηση: γενικεύει αυτήν την ιδέα σε οποιαδήποτε κατ. $\|\bar e_1\| = \|\bar e_2\|=1$

Ορισμός (παράγωγος κατά κατεύθυνση): Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$ και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{v}\| = 1$

[υπάρχουν υπεραριθμήσιμα πολλά τέτοια $\bar{v}$, ένα για κάθε κατεύθυνση, στον $\mathbb{R}^2$.



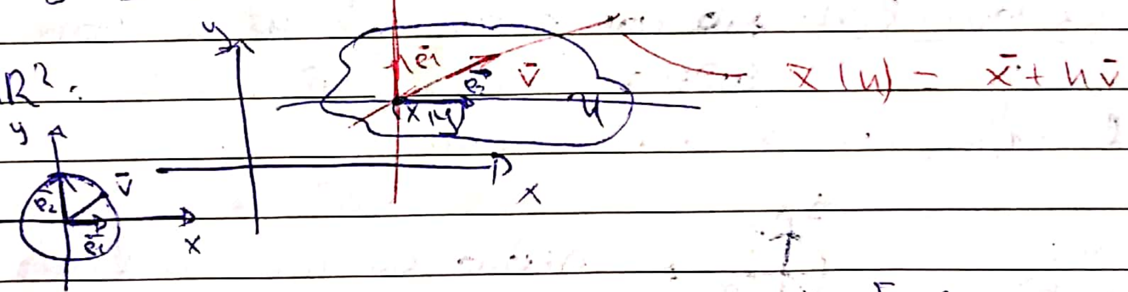
]

Το όριο $\frac{df}{d\bar{v}}(\bar{x})$ ισούται με $\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$ ονομάζεται παράγωγος στην κατεύθυνση $\bar{v}$ στο σημείο $\bar{x}$ της f.

[Δηλαδή π.χ. στον $\mathbb{R}^2$ το $\frac{df}{d\bar{v}}(x_0, y_0) = f'_{\bar{v}}(0)$ με $f_{\bar{v}}(h) = f((x_0, y_0) + h\bar{v})$]

Άρα συμπεραίνουμε: η παραγ. κατά κατευθ. $\bar{v}$ μιας $f: U \to \mathbb{R}$ στο $\bar{x}$ είναι η παράγωγος της f περιορισμένης στην ευθεία $\bar{x}(h) = \bar{x} + h\bar{v}$, $h \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$:



Παρατήρηση: $\frac{df}{d\bar{e}_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ [βλ. ορισμούς]

[κατευθ. παραγ. = παραγ. κοινής μιας μεταβλ.]